

**ISTITUZIONI ANALISI SUP. 1, AA 06/07**  
**PROVA SCRITTA DEL 27/10/06**

- (1) Sia  $\mathcal{C} = \{(a, b] | a, b \in [-\infty, +\infty], a \leq b\}$ . Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  crescente e continua da destra in ogni punto (cioè:  $F(x) = \lim_{y \rightarrow x+} F(y) \forall x \in \mathbb{R}$ ). Poniamo

$$\begin{cases} F(+\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y), \\ F(-\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y). \end{cases}$$

Provare le seguenti affermazioni:

- (a)  $\mathcal{C}$  è una semialgebra su  $(-\infty, +\infty]$ .
  - (b)  $\mu((a, b]) = (F(b) - F(a))$  è una misura sulla semialgebra  $\mathcal{C}$ .
  - (c)  $\mu$  si estende a una misura sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  di Borel su  $\mathbb{R}$ .  
Inoltre:
  - (d) chiamando sempre  $\mu$  questa misura estesa e preso  $a \in \mathbb{R}$ , stabilire quanto vale  $\mu(\{a\})$ .
- (2) Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$ , preso  $y \in \mathbb{R}^n$  poniamo:  $E + y = \{x \in \mathbb{R}^n | x = z + y, z \in E\}$ . Provare le seguenti affermazioni:
- (a)  $\mu^*(E + y) = \mu^*(E) \forall y \in \mathbb{R}^n$ .
  - (b) Se  $E$  è misurabile, anche  $E + y$  lo è.
- (3) Sia  $f$  una funzione misurabile su uno spazio con misura  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , e sia  $c \in \mathbb{R}$  fissato. Provare che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1/f(x) & \text{se } f(x) \neq 0, \\ c & \text{se } f(x) = 0. \end{cases}$$

è misurabile.